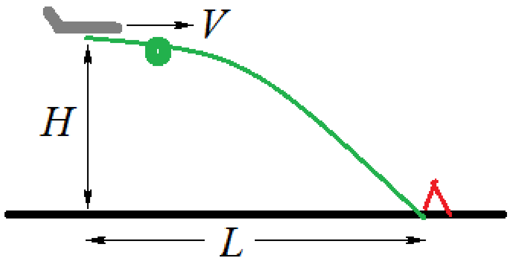
Решение домашнего задания №4

Движение в трехмерном пространстве

4.1. Самолет летит со скоростью V = 500 км/ч на высоте H = 2 км точно в направлении неподвижной льдины, на которой находится терпящий бедствие полярный исследователь. За какое время до момента пролета над головой полярника экипажу самолета следует сбросить аварийный спасательный пакет для того, чтобы полярник получил реальную помощь?

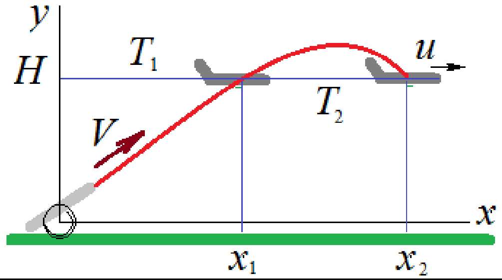
Идея решения: рассмотреть два независимых движения груза: равномерное движение по горизонтали со скоростью самолета и равноускоренное падение вниз с нулевой начальной скоростью.

Решение:

1.		Рисунок к решению задачи
2.	$H = \dfrac{gT^2}{2} \quad \Rightarrow \quad T = \sqrt{\dfrac{2H}{g}}$	Время падения груза на поверхность моря
3.	$L = VT = V\sqrt{\dfrac{2H}{g}}$	Расстояние, которое «пробежит» по поверхности моря тень груза, горизонтальная составляющая скорости которого постоянна и равна скорости самолета. Экипаж должен сбросить груз в тот момент, когда самолет не долетел до полярника именно это расстояние.
4.	$\tau = \dfrac{L}{V} = \sqrt{\dfrac{2H}{g}}$	Время, за которое самолет полетит расстояние *L*. Именно с таким опережением следует бросать груз.
Ответ: груз следует сбросить с самолета за время $\tau = \sqrt{2H/g}$ до того момента, как он пролетит над палаткой полярника.		

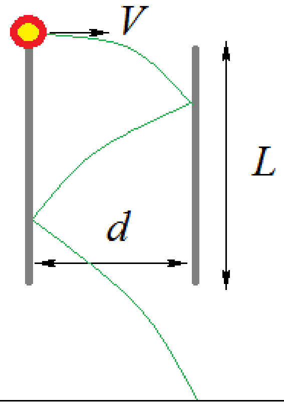
4.2. Автоматический самолет-разведчик летит с постоянной скоростью на высоте H над землей и пролетает точно над головой не слишком расторопного зенитчика, не утруждавшего себя прилежным изучением физики в школе. Заметив это, зенитчик спешно заряжает орудие и через время T_1 после пролета над его головой самолета производит выстрел (начальная скорость снаряда равна V) точно в направлении фактического положения самолета в этот момент. Выполнив свою работу не слишком расторопный зенитчик задумался о том, что за время полета снаряда самолет улетит с того места, куда он целился, да и сам снаряд будет двигаться вовсе не по прямолинейной траектории... Сильно загрустивший зенитчик был сильно удивлен, заметив, что, несмотря на его опасения, снаряд все же попал в самолет-разведчик через время T_2 после выстрела. С какой скоростью летел самолет?

Идея решения: снаряд попадет в самолет-разведчик в том случае, если в один и тот же момент времени обе координаты снаряда и самолета совпадут.

1.		Рисунок к решению задачи
2.	$x_1 = uT_1$	X–координата самолета в момент выстрела.
3.	$x_2 = u(T_1 + T_2)$	X–координата самолета в момент попадания в него снаряда
4.	$tg\alpha = \dfrac{H}{uT_1}$	Тангенс угла, под которым был произведен выстрел.
5.	$\begin{cases} X = VT_2 \cos\alpha \\ Y = VT_2 \sin\alpha - gT_2^2/2 \end{cases}$	Координаты снаряда в момент попадания в самолет
6.	$\begin{cases} u(T_1 + T_2) = VT_2 \cos\alpha \\ H = VT_2 \sin\alpha - gT_2^2/2 \end{cases}$	Условие попадания снаряда в самолет.
7.	$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{u(T_1 + T_2)}{VT_2} \\ \sin\alpha = \dfrac{H + gT_2^2/2}{VT_2} \end{cases} \Rightarrow \quad tg\alpha = \dfrac{H + gT_2^2/2}{u(T_1 + T_2)}$	Вычисление тангенса угла прицеливания из (6).
8.	$\dfrac{H + gT_2^2/2}{u(T_1 + T_2)} = \dfrac{H}{uT_1}$	Следствие из (4) и (6).
9.	$H = g\dfrac{T_1 T_2}{2}$	Результат упрощения (8). Искомая скорость самолета u не вошла в конечное выражение.
	Ответ: если $H = gT_1T_2/2$, описанная в условии задачи ситуация произойдет при ЛЮБОЙ скорости самолета, приведенных в условии данных не достаточно для ответа на поставленный вопрос; если $H \neq gT_1T_2/2$, попадание снаряда в самолет невозможно ни при какой скорости последнего, задача не имеет решения.	

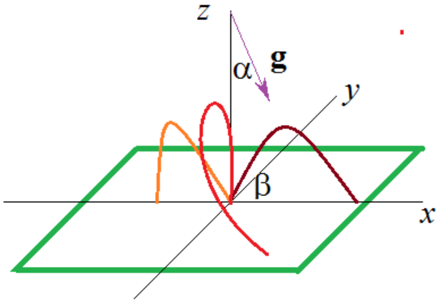
4.3. Две вертикальные пластины длиной L = 1м расположены параллельно на расстоянии d = 10 см друг от друга. С верхнего края одной из пластин с начальной горизонтальной скоростью V =1 м/с в горизонтальном направлении в направлении к другой пластине выстреливается небольшой шарик, который падает вниз, упруго отражаясь от пластин. Сколько раз шарик ударится о пластины?

Идея решения: рассмотреть движение как сумму двух: равномерного движения «вправо-влево» со скоростью V между пластинами и равноускоренного движения вниз по вертикали с ускорением g.

1.		Рисунок к решению задачи
2.	$L = g\dfrac{T^2}{2} \quad \Rightarrow \quad T = \sqrt{2L/g}$	Время нахождения шарика в зазоре между пластинами (по вертикали шарик движется с постоянным ускорением *g*)
3	$\tau = d/V$	Время движения шарика от одной пластины до другой (по горизонтали шарик движется с постоянной скоростью *V*, которая при упругом ударе о пластины изменяется на противоположную по направлению, но остается такой же по величине.
4.	$N = \left[\dfrac{T}{\tau}\right] = \left[\dfrac{V\sqrt{2L/g}}{d}\right]$	Число ударов о пластины. Квадратными скобками обозначена операция вычисления целой части.
5	$N = \left[\dfrac{V\sqrt{2L/g}}{d}\right] = \left[\dfrac{1\sqrt{2\cdot 1/10}}{0.1}\right] = [4.47] = 4$	Подстановка численных значений.
	Ответ: произойдет $N = \left[\dfrac{V\sqrt{2L/g}}{d}\right] = 4$ удара шарика о пластины.	

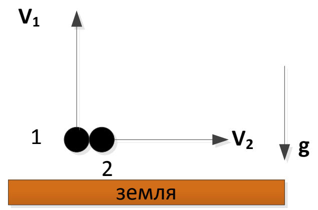
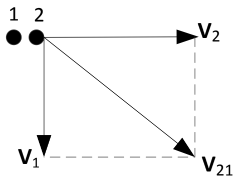
4.4. На одном из островов Бермудского треугольника ускорение свободного падения *g* направлено не вертикально вниз, а отклонено в северном направлении на угол α = 30^0. Туземец, рост которого очень мал, трижды стреляет из лука под углом β = 45^0 в разных направлениях: 1) на север, 2) на юг; 3) на восток. На каком расстоянии от туземца стрелы упадут на землю? Начальная скорость стрелы V = 10 м/с. Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

<u>Идея решения:</u> рассмотреть независимые движения вдоль каждой из координатных осей. В отличие от известных задач на движение тела, брошенного под углом к горизонту в «нормальной» местности, на острове Бермудского треугольника движение стрелы будет равноускоренным не только вдоль вертикальной оси *z*, но и вдоль горизонтально направленной оси *x*.

1.		Рисунок, поясняющий решение задачи.
2.	$\mathbf{R}(t)=\mathbf{V}t+\frac{1}{2}\mathbf{g}t^2$	Радиус-вектор, описывающей положение стрелы в произвольный момент времени полета в случае равноускоренного движения.
3.	$\mathbf{g}=\begin{pmatrix} g\sin\alpha \\ 0 \\ -g\cos\alpha \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} g_x=g\sin\alpha \\ g_y=0 \\ g_z=-g\cos\alpha \end{cases}$	Два эквивалентных способа записи проекций вектора ускорения свободного падения на координатные оси: в виде «столбца» и в виде системы трех уравнений.
4	$R_z(t)=V\sin\beta\cdot t-\frac{1}{2}g\cos\alpha\cdot t^2$	Проекция векторного равенства (3) на вертикальную ось z.
5.	$R_z(T)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} T=0 \\ T=2\dfrac{V\sin\beta}{g\cos\alpha} \end{array}\right.$	Вычисление времени полета стрелы из условия ее нахождения на поверхности острова (R_z = 0).
6.	$\mathbf{V}_C=\begin{pmatrix} V\cos\beta \\ 0 \\ V\sin\beta \end{pmatrix} \Rightarrow$ $L_C=R_x(T)=V\cos\beta\cdot T+\frac{g\sin\alpha}{2}T^2=\frac{V^2}{g}\left(\frac{\sin(2\beta)}{\cos\alpha}+2\frac{\sin\alpha\sin^2\beta}{\cos^2\alpha}\right)$	Начальная скорость и дальность полета стрелы в случае выстрела на север.

4.5. С очень высокой башни одновременно бросают два камня, придав им одинаковую по модулю начальную скорость *V*: один камень бросают горизонтально, другой – вертикально вверх. На каком расстоянии друг от друга будут находиться камни через интервал времени Т после броска, меньший, времени падения камней на поверхность Земли?

<u>*Идея решения*</u>: рассмотреть решение задачи в системе отсчёта, связанной с одним из движущихся тел. Преимущества такого подхода заключается в том, что исключается движение тела, с которым связана система отсчета.

<table>
<tr><td></td><td>СО «Земля»</td><td>СО «1 тело»</td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>
</td><td>
</td><td>Рисунок, поясняющий решение задачи</td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="2">$\mathbf{V}_{21}=\mathbf{V}_2-\mathbf{V}_1$
$V_1=V_2=V$
$V_{21}=\sqrt{2}\,V$</td><td>Пусть система отсчёта связана с первым телом, которое поднимается вверх относительно земли. Тогда второе тело движется со скоростью V_{21} относительно первого. V_1 *и* V_2 – абсолютные скорости тел в системе отсчёта «Земля».</td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="2">$\mathbf{g}_1=\mathbf{g}_2=g$
$\mathbf{g}_{21}=\mathbf{g}_2-\mathbf{g}_1=0$</td><td>Ускорения тел в системе отсчёта «Земля» одинаковые как по модулю, так и по направлению во все время движения. Поэтому их относительное ускорение равно нулю, т.е. тело 2 движется равномерно относительно тела 1.</td></tr>
<tr><td>4</td><td colspan="2">$S=V_{21}T=\sqrt{2}VT$</td><td>Двигаясь равномерно в системе отсчёта «1 тело», второе тело удалится от первого тела на расстояние *S*.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Ответ: Через время Т расстояние между телами будет $S=\sqrt{2}VT$</td></tr>
</table>